INSTITUT SUPÉRIEUR DE GESTION

CONCOURS D'ADMISSION DE 1980

MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 5

Toutes les questions traitées doivent être référencées avec *précision*.

La présentation ainsi que la rigueur des raisonnements ont une importance fondamentale.

PRÉLIMINAIRES

On désigne par $\mathbb{C}^m$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de dimension m, des m-uplets de nombres complexes, et par $\mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{C}^m$ ($m \in \mathbb{N}^*$).

On pose $\mathfrak{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots \vec{e_m})$, où $\vec{e_i}$ est le m-uplet dont la $i^{\text{ème}}$ composante est égale à 1 et dont les autres composantes sont toutes nulles; on notera $\vec{0}$ l'élément neutre de $\mathbb{C}^m$.

Sauf pour les $\vec{e_i}$, les lettres minuscules représenteront des nombres complexes, et les lettres majuscules d'imprimerie, des m-uplets. Par exemple :

$$P = \sum_{i=1}^{m} p_i \vec{e_i}.$$

Enfin, on dira qu'une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}^m$ converge dans $\mathbb{C}^m$ et a pour limite Q si et seulement si la suite numérique de terme général $u_n = \sum_{i=1}^{m} |p_{i,n} - q_i|$ converge vers 0, $p_{i,n}$ et q_i étant respectivement les composantes de rang i de P_n et de Q relativement à $\mathfrak{B}$. On écrira alors simplement : $(P_n) \longrightarrow Q$.

I

Q. 1. 1° Montrer que, quel que soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$,

$$[(P_n) \to \vec{0}] \Rightarrow [(\varphi(P_n)) \to \vec{0}]$$

2° En déduire que, quel que soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$,

$$[(P_n) \to Q] \Rightarrow [(\varphi(P_n)) \to \varphi(Q)]$$

3° Sous quelle condition l'implication réciproque de la précédente est-elle vraie?

.../...

Q. 2. Soit $\mathcal{S} = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$ et $E(\mathcal{S})$ l'ensemble des éléments P de $\mathbb{C}^m$ tels que la suite $[\varphi_n(P)]_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}^m$.

1° Montrer que $E(\mathcal{S})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^m$.

2° On définit l'application $\widehat{\varphi}$ de $E(\mathcal{S})$ dans $\mathbb{C}^m$ par la relation suivante, vraie quel que soit $P \in E(\mathcal{S})$:

$$\widehat{\varphi}(P) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(P)$$

Montrer que $\widehat{\varphi}$ est un homomorphisme de $E(\mathcal{S})$ dans $\mathbb{C}^m$.

3° On dira que $\mathcal{S}$ converge dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$ si et seulement si $E(\mathcal{S}) = \mathbb{C}^m$. $\widehat{\varphi}$ s'appellera alors la limite de $\mathcal{S}$ et on écrira simplement $(\varphi_n) \rightsquigarrow \widehat{\varphi}$.

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ une base quelconque de $\mathbb{C}^m$. Montrer que :

$$[(\varphi_n) \rightsquigarrow \widehat{\varphi}] \Leftrightarrow [\forall X_i, \quad \varphi_n(X_i) \longrightarrow \widehat{\varphi}(X_i)]$$

4° Soient $[a_{i,j}^{(n)}]$ et $[b_{i,j}]$ les matrices respectives de φ_n et de $\widehat{\varphi}$ (*). Montrer que :

$$[(\varphi_n) \rightsquigarrow \widehat{\varphi}] \Leftrightarrow [\forall (i,j), \lim_{n \to \infty} |a_{i,j}^{(n)} - b_{i,j}| = 0]$$

5° Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$. On définit la suite $\mathcal{S} = (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit : $\psi_0 = \mathrm{Id}$., $\psi_1 = \varphi$; et pour $n \geqslant 2$:

$$\psi_n = \varphi \circ \psi_{n-1}$$

Montrer que :

$$[(\psi_n) \rightsquigarrow \mathrm{Id}] \Leftrightarrow [\varphi = \mathrm{Id}]$$

(Id désignant l'identité sur $\mathbb{C}^m$).

(*) Relativement à une base donnée.

II

On se place maintenant dans $\mathbb{C}^4$. Dans toute la suite, on notera φ l'application de $\mathbb{C}^4$ dans lui-même qui à $P = \sum_{i=1}^{4} p_i \vec{e}_i$ fait correspondre

$$\varphi(P) = \frac{1}{2}\left[(p_1 + p_2)\vec{e}_1 + (p_2 + p_3)\vec{e}_2 + (p_3 + p_4)\vec{e}_3 + (p_4 + p_1)\vec{e}_4\right]$$

et on notera $V = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$.

Q. 3. 1° Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$.

2° Expliciter la matrice M de φ relativement à $\mathcal{B}$.

3° Déterminer le noyau de φ.

4° Soit ψ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ défini par :

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{4} p_i \vec{e}_i\right) = (p_1 - p_2 + p_3 - p_4)\, V$$

Montrer que $\mathrm{Ker}\,\psi = \mathrm{Im}\,\varphi$.

5° Identifiant $\mathbb{C}^4$ à l'ensemble des quadruplets du plan réel, quelle interprétation géométrique donnez-vous au résultat précédent ?

. . . / . . .

Q. 4. 1° Expliciter les matrices de φ, φ^2 et φ^3 relativement à $\mathcal{B}$.

2° Notant $\equiv$ la congruence dans $\mathbf{Z}$ modulo 4, montrer que, quel que soit $(n, k) \in \mathbf{N}^2$

$$\sum_{\substack{i=k \\ 0 \leqslant i \leqslant n}} C_n^i + \sum_{\substack{i=k+1 \\ 0 \leqslant i \leqslant n}} C_n^i = \sum_{\substack{i=k+1 \\ 0 \leqslant i \leqslant n+1}} C_{n+1}^i$$

3° En déduire la forme générale de la matrice de φ^n.

Q. 5. 1° Montrer que V est un vecteur propre de φ et préciser la valeur propre correspondante.

2° Déterminer toutes les valeurs propres de φ.

3° Donner pour chacune d'elles, le vecteur propre correspondant, dont la première composante relativement à $\mathcal{B}$ est égale à 1.

4° Exprimer la matrice de φ relativement à la base $\mathcal{B}_0 = (V, V_1, V_2, V_3)$ des vecteurs propres de φ calculés à la question précédente, V_2 et V_3 étant associés aux valeurs propres non réelles de φ.

5° En déduire que la suite $(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par : $\psi_0 = \mathrm{Id}$; $\psi = \varphi$
et pour $n \geqslant 2$ par $\psi_n = \varphi \circ \psi_{n-1}$,
converge dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$ et préciser sa limite. Interprétation géométrique?

6° En déduire la limite quand $n \longrightarrow \infty$ de la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{2^n}\left(p_1 \sum_{\substack{i=0 \\ 0 \leqslant i \leqslant n}} C_n^i + p_2 \sum_{\substack{i=1 \\ 0 \leqslant i \leqslant n}} C_n^i + p_3 \sum_{\substack{i=2 \\ 0 \leqslant i \leqslant n}} C_n^i + p_4 \sum_{\substack{i=3 \\ 0 \leqslant i \leqslant n}} C_n^i\right)$$

où (p_1, p_2, p_3, p_4) est un élément quelconque de $\mathbb{C}^4$.

Q. 6. Vous avez certainement compris que, à une identification près, Im (φ) n'est autre que l'ensemble des parallélogrammes du plan réel. On appellera « carré » tout élément P de Im (φ) vérifiant les conditions :

α. $|p_3 - p_1| = |p_4 - p_2|$

β. Re $[(p_3 - p_1)(\overline{p_4} - \overline{p_2})] = 0$ (Re = partie réelle)

$$\left(\text{où } P = \sum_{i=1}^{4} p_i \vec{e}_i\right)$$

1° Quelle est la signification géométrique de α.?

2° Quelle est la signification géométrique de β.?

3° Montrer que tout « carré » P se décompose d'une manière unique sous la forme :

$$P = \lambda_1 V + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 \text{ avec } \lambda_2 \lambda_3 = 0$$

4° Montrer que tous les éléments de $\mathbb{C}^4$ qui se décomposent ainsi sont des « carrés ».

5° Calculer λ_1, λ_2 et λ_3 en fonction des p_i.

.../...

Soit P un élément de $\mathbb{C}^4$ et σ un endomorphisme de $\mathbb{C}^4$. On dira que σ « translate » P s'il existe un complexe p tel que $\sigma(P) = P + pV$. On notera $T(\sigma)$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}^4$ que σ « translate », $\mathfrak{T}$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{C}^4$ qui « translatent » tous les éléments de $\mathbb{C}^4$ et $\mathfrak{T}_0$ l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{C}^4$ qui appartiennent à $\mathfrak{T}$.

Q. 7. 1° Montrer que, quel que soit $\sigma \in \mathfrak{L}(\mathbb{C}^4)$, $T(\sigma)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^4$.

2° Montrer que $\mathfrak{T}$ est isomorphe à $\mathbb{C}^4$. (Préciser les opérations.)

3° Montrer que $\mathfrak{T}_0$, muni de la composition des applications, est un groupe non commutatif.

4° Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{T}$, 1 est valeur propre de σ avec un ordre de multiplicité au moins égal à 3.

5° Expliciter une famille libre de trois vecteurs propres de σ associés à la valeur propre 1, en fonction des $\vec{e_i}$ et des a_i, où $\sigma(\vec{e_i}) = \vec{e_i} + a_i V$.

6° Montrer que, si $\sigma \in \mathfrak{T}$, $[\sigma \in \mathfrak{T}_0] \Leftrightarrow [\sigma(V) \neq \vec{0}]$

7° Posant $\sigma(V) = V + vV$, redémontrer la question précédente en calculant le déterminant de σ en fonction de v.

Q. 8. Soient $\sigma \in \mathfrak{T}$ et $P \in \mathbb{C}^4$. On pose $\sigma(V) = V + vV$ et $\sigma(P) = P + pV$.

1° Reproduire et compléter le tableau suivant :

	$v = 0$	$v \neq 0$
$p = 0$	$\sigma^n(P) = \ldots$	$\sigma^n(P) = \ldots$
$p \neq 0$	$\sigma^n(P) = \ldots$	$\sigma^n(P) = \ldots$

2° En déduire une condition nécessaire et suffisante sur v pour que la suite des σ^n converge dans $\mathfrak{L}(\mathbb{C}^4)$.

3° Préciser cette limite lorsqu'elle existe.

4° Montrer que si σ et τ sont deux éléments de $\mathfrak{T}$ tels que la suite des σ^n et la suite des τ^n convergent toutes les deux dans $\mathfrak{L}(\mathbb{C}^4)$, $\sigma \circ \tau$ est lui aussi un élément de $\mathfrak{T}$ tel que la suite des $(\sigma \circ \tau)^n$ converge dans $\mathfrak{L}(\mathbb{C}^4)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail